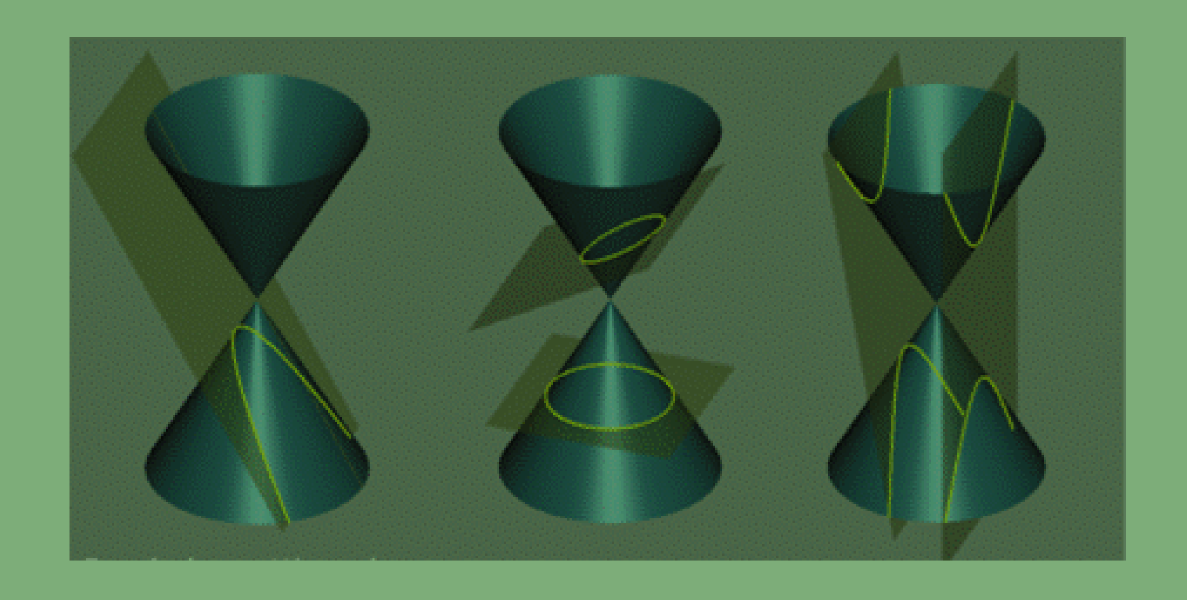
CÓNICAS:

ESTUDIO MÉTRICO DE CÓNICAS

por

DANILO MAGISTRALI



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-09

CÓNICAS:

ESTUDIO MÉTRICO DE CÓNICAS

por

DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-09

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Cónicas. Estudio métrico de cónicas.
© 2013 Danilo Magistrali.
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 415.01 / 3-89-09
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-481-3
ISBN-13: 978-84-9728-482-0
Depósito Legal: M-30288-2013

Índice

Índice de figuras

Estudio métrico de cónicas

1. Introducción

Estos apuntes sobre las cónicas quieren ser principalmente una ayuda para los estudiantes que se enfrentan a un capítulo de la *Geometría*.

Muchas veces los estudiantes llegan a la Universidad sin tener bien claros los conceptos básicos de la geometría analítica y no pocas veces desconocen por completo las nociones elementales sobre las cónicas. Aquí queremos dar las principales herramientas para el estudio de las cónicas.

En el primer capítulo se estudiarán las cónicas desde un punto de vista métrico: su clasificación, sus propiedades y sus elementos principales.

El el segundo capítulo volveremos a encontrar los mismos resultados describiendo las cónicas en coordenadas homogéneas. La última parte está dedicada a estudiar algunos casos de haces de cónicas.

Se ha ahorrado el rigor matemático en favor de la comprensión intuitiva de los problemas, así que se han omitido algunas demostraciones.

Quiero agradecer a los compañeros del departamento de Matemática Aplicada de la ETSAM, en particular a la profesora Eugenia Rosado y al profesor Félix Ruiz por pasarme apuntes, resolver mis dudas y aconsejarme de varias maneras.

2. Una primera mirada hacia las cónicas

La primera definición conocida de sección cónica surge en la Antigua Grecia, cerca del año 350 (*Menæchmus*), donde las definieron como secciones «de un cono circular recto». Los nombres de hipérbola, parábola y elipse se deben a *Apolonio de Perge*. Actualmente, las secciones cónicas pueden definirse de varias maneras. Estas definiciones provienen de las diversas ramas de la matemática: como la geometría analítica, la geometría proyectiva, etc.

Un doble cono recto es la figura que engendra una recta g al girar alrededor de una recta h que la corta. La recta h se denomina eje del cono y las distintas posiciones de g, generatrices del cono; el punto de intersección de g con h se llama vértice. Toda figura plana que se obtiene como intersección de un doble cono recto con un plano que la corta se denomina *sección cónica.*

Según las distintas posiciones del plano de corte, las secciones cónicas reciben nombres diferentes véase la figura 1.

a) Supongamos que el plano no pase por el vértice y que sea α el ángulo que forma el eje del cono con las generatrices y β el que forma el plano secante con dicho eje

1. Si $\beta > \alpha$ se dice que la sección es una *elipse* (no tiene puntos en el infinito). Hay que notar que la circunferencia es un caso particular de elipse.
2. Si $\beta < \alpha$ se dice que la sección es una hipérbola (tiene dos puntos en el infinito).
3. $\beta = \alpha$ la sección se llama parábola (tiene un punto en el infinito).

b) Si el plano pasa por el vértice del cono la sección degenera:

1. Si $\beta > \alpha$ es un punto.
2. Si $\beta < \alpha$ son dos rectas diferentes que se cortan en el vértice.
3. $\beta = \alpha$ una recta doble.

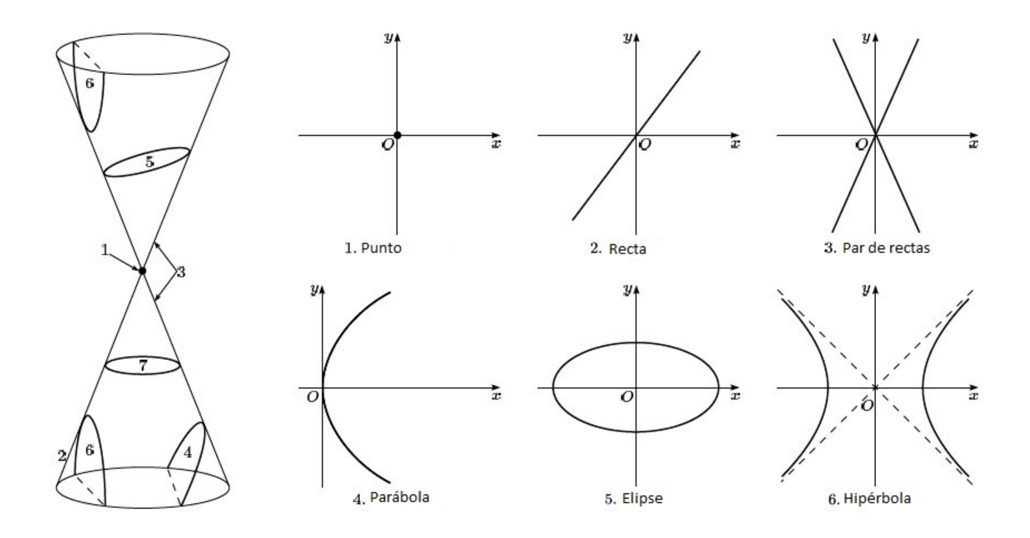


Figura 1: Secciones cónicas.

3. Las propiedades métricas de las cónicas

3.1. La elipse

La elipse se obtiene al hacer que un plano interseque a una superficie cónica de forma que corte a todas sus generatrices y no siendo perpendicular al eje de la superficie cónica. Vamos a estudiar qué propiedad $\mathcal{P}$ caracteriza a todos los puntos de la elipse.

Una vez trazado el plano que corta a todas las generatrices del cono (y que contiene a la elipse), construimos dos esferas inscritas a la superficie cónica y tangentes al plano. Estas esferas también son tangentes a la superficie encerrada dentro de la elipse en dos puntos que vamos a llamar F_1 y F_2. La esfera superior corta a la superficie cónica en una circunferencia que vamos a llamar C_1 y a la esfera inferior (la grande) en otra circunferencia que llamamos C_2. Sea P un punto cualquiera de la elipse. Trazamos la generatriz que pasa por él: es decir, la recta que une el vértice del cono con el punto P. Esta recta también es tangente a las esferas grande y pequeña, así como a las circunferencias C_1 y C_2 en dos puntos que llamamos M' y M (respectivamente). Trazamos los segmentos PF_1 y PF_2. Ambos son tangentes, respectivamente, a la esfera grande y a la esfera pequeña, ya que ambos segmentos están contenidos en el plano, que a su vez es tangente a ambas esferas.

Vamos a demostrar que $\overline{\mathbf{PF_1}} + \overline{\mathbf{PF_2}}$ es constante independiente-

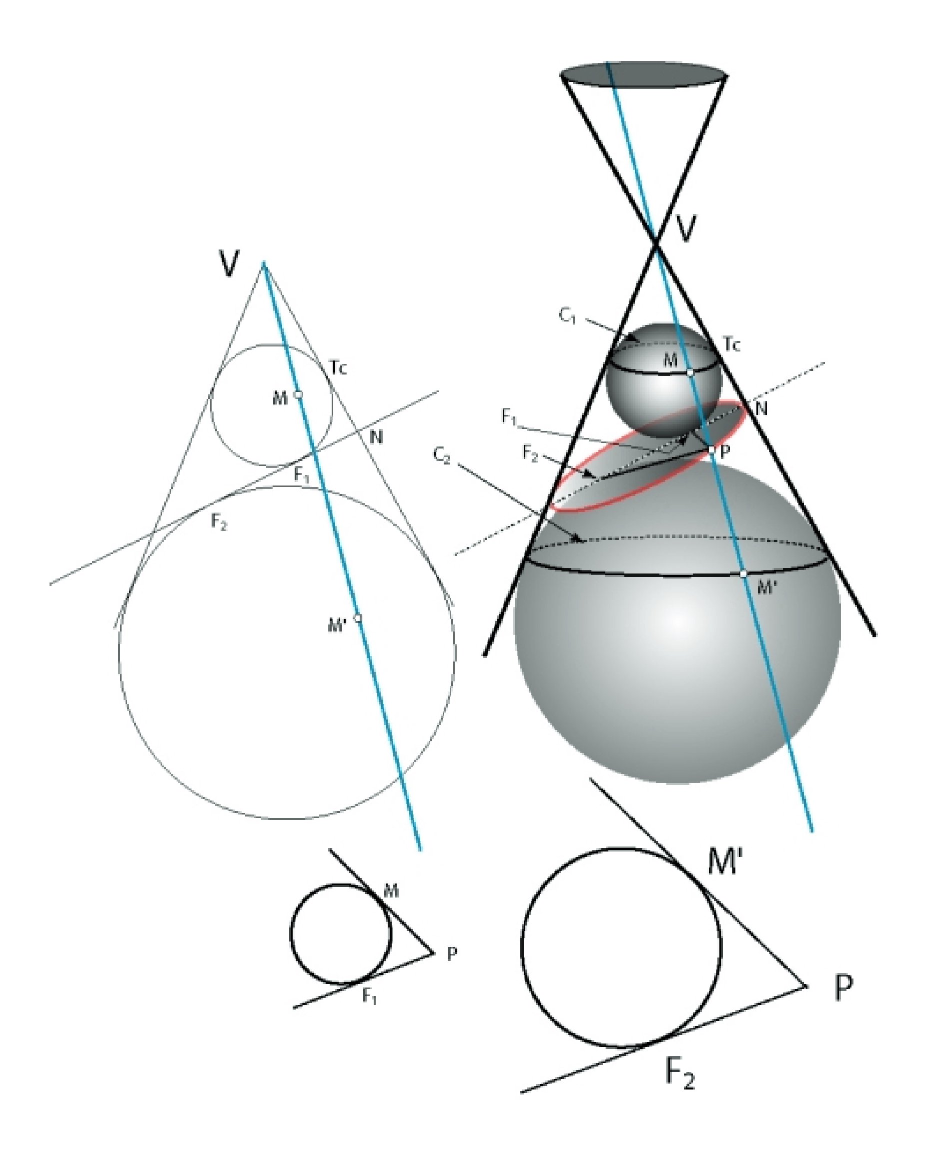


Figura 2: Elipse con dos esferas tangentes.

mente del punto P.

Si desde un punto exterior a una esfera trazamos dos tangentes situadas en el mismo plano los segmentos desde el punto a los puntos de tangencia son iguales. Por tanto, $\overline{PM} = \overline{PF_1}$ y además $\overline{PM'} = \overline{PF_2}$.

Sumando término a término estas dos igualdades obtenemos:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PM} + \overline{PM'}$$

Ahora bien: $\overline{MM'}$ no depende del punto P; es el segmento de generatriz entre las dos esferas. Por ello $PF_1 + PF_2$ es constante.

En consecuencia la elipse, se puede definir de la siguiente forma: *lugar geométrico*[1] *de los puntos del plano tales que la suma de distancias a dos puntos fijos llamado focos, es constante.*

3.2. La hipérbola

Si un plano corta a una superficie cónica de manera que atraviesa a todas las generatrices, excepto a dos, respecto a las cuales es paralelo, determina sobre ella una hipérbola.

Sea π un plano paralelo a dos generatrices, que corta a todas las demás. Ello significa que determina sobre la superficie cónica una hipérbola. Igual que en el caso de la elipse, trazamos dos esferas inscritas en los conos y tangentes al plano: sean F_1 y F_2 los dos puntos de tangencia de las esferas con el plano. Sean C_1 y C_2 las dos circunferencias que determinan ambas esferas sobre la superficie cónica. Sea P un punto cualquiera de la hipérbola. Los segmentos PF_1 y PF_2 son tangentes a las esferas (de color verde en la Figura 3), puesto que ambos están contenidos en el plano. La generatriz que pasa por P determina sobre C_1 y C_2 dos puntos: G y H.

Vamos a demostrar que cualquiera que sea P se cumple que $\overline{\mathbf{PF_2}} - \overline{\mathbf{PF_1}}$ es constante.

Se cumple que $\overline{PF_2} = \overline{PG}$ puesto que ambos segmentos son tangentes a la esfera y se cumple que $\overline{PF_1} = \overline{PH}$ por la misma razón que antes.

Restando término a término

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PG} - \overline{PH} = \overline{GH}$$

Pero igual que en el caso de la elipse, $\overline{GH}$ no depende del punto P; es un segmento de generatriz entre las dos esferas. Por ello $\overline{PF_2} - \overline{PF_1}$ es constante, tal y como queríamos demostrar.

No es muy difícil demostrar que los puntos que no son de la hipérbola no cumplen la condición anterior.

Por tanto, la hipérbola se puede definir de la siguiente forma: *lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamado focos, es constante.*

[1] En geometría un *lugar geométrico* es el conjunto de todos y solos los puntos que cumplen cierta propiedad.

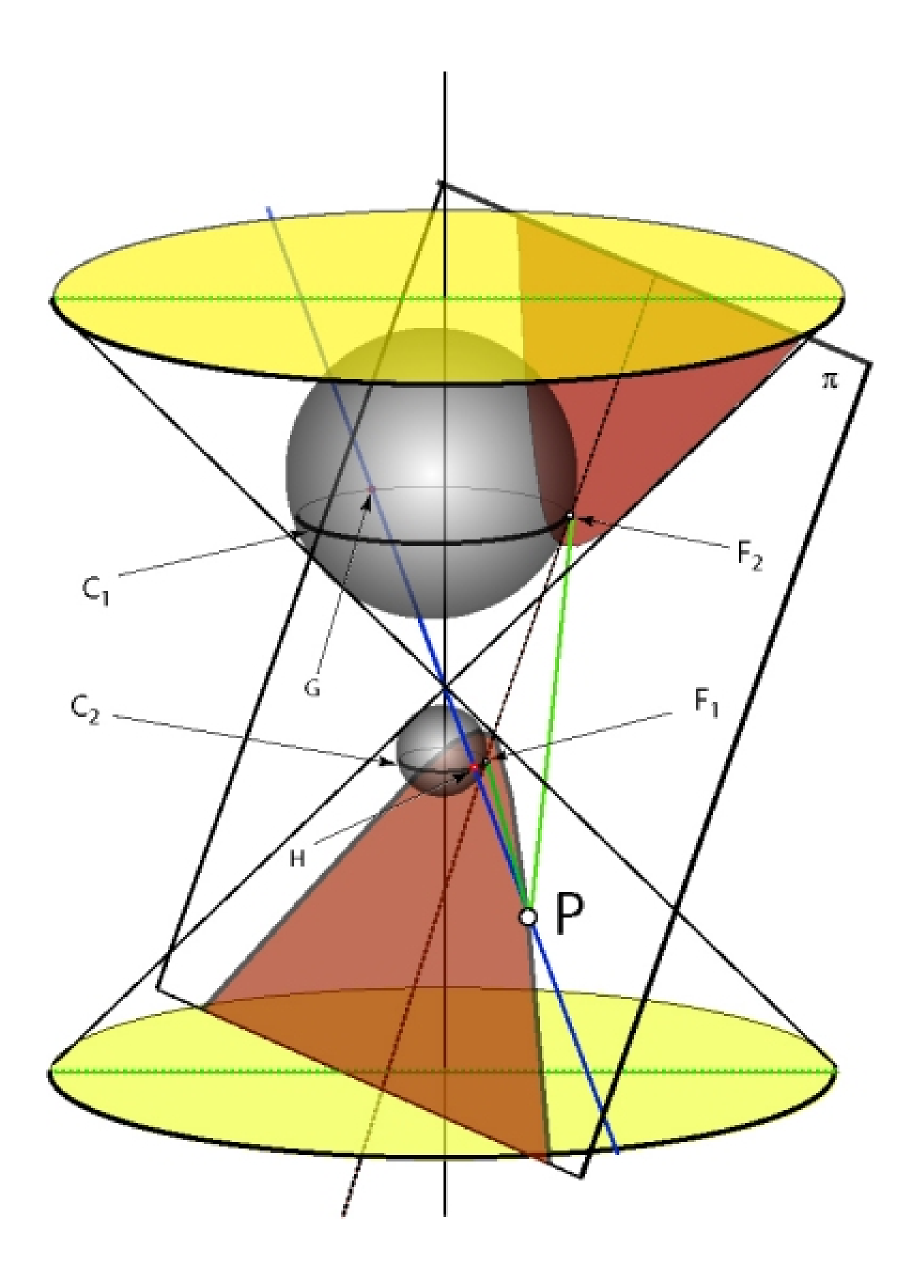


Figura 3: Hipérbola con dos esferas tangentes.

3.3. La parábola

Un plano que corta a una superficie cónica paralelo a una sola generatriz determina una parábola sobre ella. Buscamos caracterizar a todos los pun-

tos de la parábola, es decir determinar una propiedad que solamente ellos cumplan.

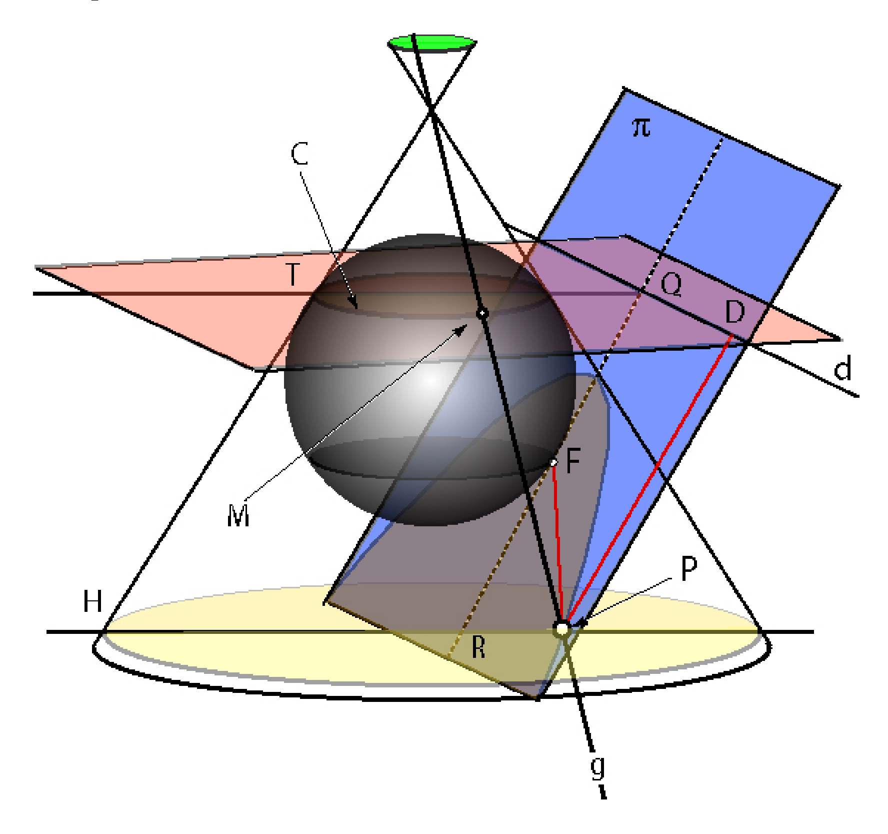


Figura 4: Parábola con una esfera tangente.

Sea π un plano paralelo a una sola generatriz. Trazamos la esfera inscrita en la superficie cónica y tangente al plano: sea F el punto de tangencia de la esfera y el plano. Por otro lado la esfera determina en la superficie cónica una circunferencia C. El plano en que contiene a C corta a π en una recta que llamamos d.

Vamos a demostrar que si P es un punto cualquiera de la parábola entonces $\mathbf{d}(\mathbf{P},\mathbf{F}) = \mathbf{d}(\mathbf{P},\mathbf{d})$.

Sea g la generatriz que pasa por P; dicha generatriz corta a C en un punto M. Entonces tendremos:

1. Sabemos que dos planos paralelos determinan sobre dos generatrices de la cónica segmentos iguales. Por ello $\overline{PM} = \overline{HT}$

2. Por otro lado $\overline{HT} = \overline{RQ}$, ya que ambos segmentos están determinados por planos paralelos sobre rectas paralelas.

3. Además $\overline{RQ} = \overline{PD}$ ya que ambos segmentos están sobre rectas paralelas y están determinados por planos paralelos.

4. Obtenemos que $\overline{PM} = \overline{PD}$ Por otro lado $\overline{PM} = \overline{PF}$, ya que ambos segmentos son tangentes a la esfera desde el punto P. Se concluye que $\overline{PD} = \overline{PF}$

Con lo cual queda demostrado que cualquier punto P de la parábola cumple que

$$\mathrm{d}(P, F) = \mathrm{d}(P, d)$$

No es muy difícil demostrar que los puntos que no son de la parábola no cumplen la condición de equidistar de F y d.

Por tanto, la parábola se puede definir de la siguiente forma: *lugar geométrico de los puntos del plano tales que equidistan de un punto fijo llamado foco, y una recta llamada directriz, que no pase por el foco.*

4. Estudio métrico de las cónicas en su forma canónica

Cuando los matemáticos de los siglos XVI y XVII estudiaron los trabajos griegos, empezaron a comprobar la falta de generalidad de los métodos de demostración; lo que llevó a sustituir la visión puramente geométrica de las secciones cónicas por otra que incorporaba las nociones de coordenadas y distancia. Esto llevo a la definición de estas curvas como lugares geométricos de puntos que verificaban ciertas propiedades en términos de distancia.

4.1. Circunferencia

Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del planos equidistantes de un punto fijo llamado centro.

Sea $P(x, y)$ un punto que pertenece a la circunferencia de centro C y sea r su radio entonces

$$\overline{PC}^2 = r^2$$

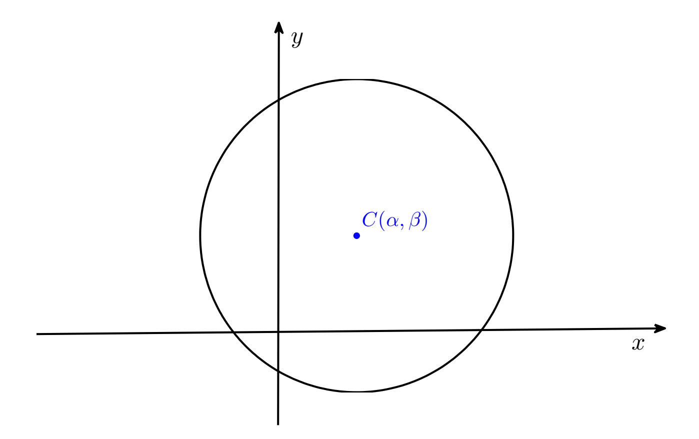


Figura 5: Circunferencia $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

o sea

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \quad (1)$$

que es la ecuación cartesiana de la circunferencia.

Si el centro coincide con el origen entonces la ecuación se reduce a una forma muy simple:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si desarrollamos la (1) tenemos que

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

que se puede escribir de forma más compacta

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (2)$$

que es una ecuación algebraica de grado 2 en x, y que no tiene el término xy y los coeficientes de x^2 y de y^2 son iguales entre ellos.

Es interesante ver que el resultado que acabamos de hallar se puede invertir. Si escribimos la ecuación (2) en la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by = -c$$

y añadimos los términos $\frac{a^2}{4}$ y $\frac{b^2}{4}$ para completar cuadrados tenemos:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \quad (3)$$

Cuando $\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\right)>0$ tenemos una circunferencia real[2] que tiene centro C

$$C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \tag{4}$$

y radio r

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c} \tag{5}$$

La ecuación (2) depende de 3 coeficientes, de ello se deduce que una circunferencia está determinada dadas 3 condiciones geométricas.

4.2. Rectas y circunferencias

Para estudiar las distintas posiciones de una recta r respecto de una circunferencia es suficiente estudiar el sistema formado por las ecuaciones de la recta y de la circunferencia. Llamando Δ al discriminante[3] de la ecuación de grado 2 que resuelve el sistema, tenemos:

- si $\Delta>0$ la recta es secante,
- si $\Delta=0$ la recta es tangente,
- si $\Delta<0$ la recta es externa.

Se sabe que eso ocurre cuando la distancia de la recta al centro es respectivamente menor, igual o mayor que el radio de la circunferencia.

Si queremos encontrar la recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto P se pueden dar dos casos.

Si P es **externo** a la circunferencia escribimos el haz de recta que pasa por P e imponemos que el sistema entre la recta genérica que pasa por P y la circunferencia tenga $\Delta=0$.

Ejemplo *Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia de ecuación* $x^2+y^2+4x-2y-15=0$ *que pasan por el punto* $A(4,-1)$. Dado que la recta $x=4$ no es tangente a la circunferencia, las tangentes son de la forma:

$$y+1=m(x-4)$$

[2]Cuando $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=0$ la circunferencia se reduce a un punto.

[3]El discriminante de una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ se define como $\Delta\equiv b^2-4ac$.

para que ésta resulte tangente tenemos que encontrar dos soluciones coincidentes del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0 \\ y + 1 = m(x - 4) \end{cases}$$

tenemos:

$$x^2(m^2 + 1) - 4x(2m^2 + m - 1) + 16m^2 + 16m - 12 = 0$$

ahora imponemos que el discriminante, que dependerá de m, sea igual a cero:

$$\Delta(m) = (2m^2 + 3m - 2) = 0$$

de donde obtenemos que $m = -2$ y $m = \frac{1}{2}$. Las ecuaciones de las rectas entonces son:

$$y + 1 = -2(x - 4) \qquad \text{y} \qquad y + 1 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

Si el punto P **pertenece** la circunferencia $\mathcal{C}$ hay una manera más rápida de calcular la recta tangente.

La recta genérica que pasa por $P(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{6}$$

Además $P \in \mathcal{C}$

$$x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0$$

Para que la recta sea tangente tiene que ser perpendicular al diámetro que pasa por P. La pendiente m de la recta tangente tiene que ser

$$m = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta} \tag{7}$$

donde $\alpha = -\frac{a}{2}$ y $\beta = -\frac{b}{2}$ son las coordenadas del centro de la circunferencia.

Sustituyendo en la ecuación (6) y teniendo en cuenta la ecuación (7) tenemos:

$$xx_1 + yy_1 + a\frac{x + x_1}{2} + b\frac{y + y_1}{2} + c = 0 \tag{8}$$

La ecuación de la tangente a una circunferencia en un punto $P(x_1, y_1)$ que pertenece a ella, se obtiene de la ecuación de la circunferencia con las siguientes sustituciones:

$$\begin{cases} x^2 & \text{con } x_1 x \\ y^2 & \text{con } y_1 y \\ x & \text{con } \frac{x+x_1}{2} \\ y & \text{con } \frac{y+y_1}{2} \end{cases} \tag{9}$$

Este resultado podrá aplicarse también a las otras cónicas.

Es interesante notar que si la circunferencia contiene el origen

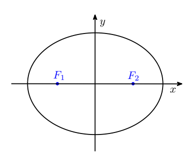
$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

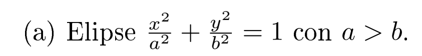
la ecuación de la tangente que pasa por el origen tiene la forma

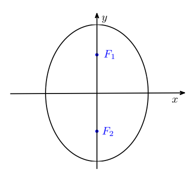
$$ax + by = 0$$

4.3. Elipse

Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales es constante la suma de las distancias de dos puntos fijos llamados focos.




(a) Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$.



(b) Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a < b$.

Indicamos con $2a$ la suma constante de un punto P de la elipse de los focos F y F' y con $2c$ la distancia entre los focos. Para determinar la ecuación cartesiana asumimos que los focos están sobre el eje de las abscisas y que sus coordenadas sean $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$.

Para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la elipse la condición necesaria y suficiente es:

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$$

o sea tenemos que:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \tag{10}$$

elevando la ecuación (10) al cuadrado dos veces y llamando $a^2 - c^2 = b^2$ se puede volver a escribir:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (11)$$

que es la forma canónica de la elipse.

Es importante subrayar que en estas condiciones la cantidad $a^2 - c^2 = b^2$ es positiva.

Veamos algunas **propiedades** de la elipse:

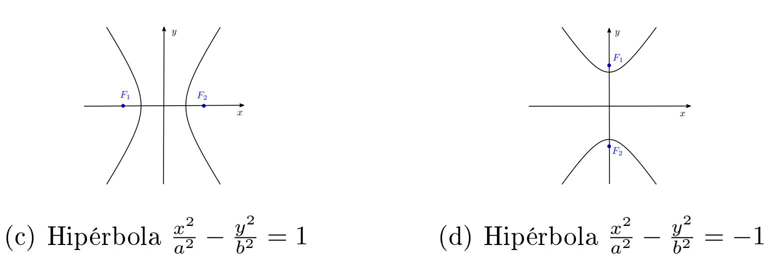
- La elipse es una curva simétrica respecto de los ejes y del centro.
- Está contenida en el rectángulo limitado por la rectas $x = -a, \quad x = a, \quad y = -b, \quad y = b$
- La intersección de la elipse con los ejes nos da 4 puntos que se llaman vértices que tienen coordenadas $A'(-a,0), A(a,0), B'(0,-b), B(0,b)$. Si los focos están sobre el eje de las abscisas $A'A$ es el eje mayor y $B'B$ es el eje menor.
- Desde la ecuación cartesiana de la elipse es fácil encontrar los focos: $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$.
- Se llama excentricidad a la relación

$$e = \frac{c}{a} \qquad e < 1$$

  La excentricidad tiene la siguiente interpretación geométrica: es la relación constante entre las distancias de un punto cualquiera P de la elipse al foco $F(c,0)$ y a la recta $x = \frac{a^2}{c}$, o también la relación constante entre las distancias de un punto P de la elipse del foco $F'(-c,0)$ y de la recta $x = -\frac{a^2}{c}$ (directrices de la elipse). La excentricidad resulta ser un número positivo menor que 1.
- Si $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$) los focos coinciden con el origen de los ejes y la elipse se transforma en una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$.
- Se llama diámetro de una elipse a cualquier recta que pasa por su centro.

4.4. Hipérbola

Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales es constante la diferencia de las distancias entre dos puntos fijos, llamados focos.



(c) Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (d) Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Sea $2a$ la diferencia constante de las distancias de un punto P a los focos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$, y sea $2c$ la distancia entre los focos. Supongamos que la recta $F'F$ coincida con el eje de las abscisas. De la definición de hipérbola tenemos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \tag{12}$$

Si elevamos al cuadrado dos veces y ponemos

$$c^2 - a^2 = b^2$$

llegamos a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

que es la ecuación canónica de la hipérbola.

Se pueden deducir algunas **propiedades** de la hipérbola:

- Es simétrica con respecto a los ejes coordenados, que se llaman ejes de la hipérbola y ésta se dice *referida a los ejes.*
- Es simétrica respecto al origen de los ejes que se llama también centro de la hipérbola.
- La hipérbola es externa a la porción de plano limitada por las rectas

$$x = -a, \qquad x = a.$$

- Los focos de la hipérbola se determinan de la siguiente relación:

$$c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

- Las asíntotas de la hipérbola son las rectas:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

  La hipérbola está toda contenida en el ángulo formado por las asíntotas que contienen al eje de las abscisas.

- La excentricidad de la hipérbola

$$e = \frac{c}{a}, \qquad e > 1$$

- Se llama diámetro de una hipérbola a cualquier recta que pasa por su centro.

4.4.1. Hipérbola equilátera

Si $a = b$, la ecuación de la hipérbola se convierte en:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

y la hipérbola se dice equilátera. Las asíntotas son:

$$y = x, \qquad \text{y} \qquad y = -x$$

o sea las bisectrices de los ejes y entonces dos rectas perpendiculares entre ellas. Si referimos la hipérbola equilátera a un nuevo sistema de ejes OXY, obtenido girando el sistema anterior un ángulo de $\pi/4$ alrededor de O, la ecuación tiene una forma particular.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

Sustituimos y obtenemos:

$$XY = -\frac{a^2}{2}$$

Si giramos un ángulo de $-\pi/4$ vemos que la ecuación de la hipérbola en este nuevo sistema de ejes es:

$$XY = \frac{a^2}{2}$$

Entonces una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas tiene una ecuación de la siguiente forma:

$$XY = k$$

Si $k > 0$ la hipérbola está en el 1^0 y 3^0 cuadrante; si $k < 0$ está en el 2^0 y 4^0 cuadrante.

4.5. Parábola

Se llama parábola el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija d, llamada directriz.

Ahora de la definición queremos escribir la ecuación de todos y sólo los puntos de la parábola.

Entonces hacemos que el eje de las ordenadas coincida con la perpendicular desde P a la directriz y sea Q el punto de intersección, y como eje $\overrightarrow{x}$ la recta perpendicular al segmento QF en su punto medio. Además si ponemos $\overline{QF} = 2p$, las coordenadas del foco son $(0, p)$.

Si $P(x, y)$ (véase figura 6) es un punto de la parábola y H la intersección de la directriz con su perpendicular que pasa por el punto P, entonces $P(x, y)$ pertenece a la parábola, si y sólo si

$$\overline{PF} = \overline{PH} \tag{14}$$

La ecuación (14) se traduce en:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|$$

si elevamos al cuadrado y ponemos $a = \frac{1}{4p}$ obtenemos

$$y = ax^2$$

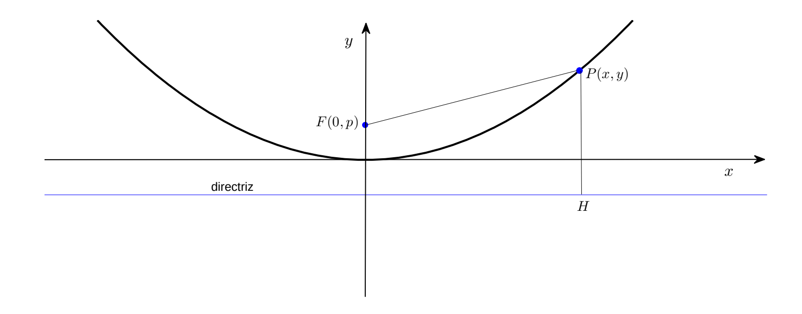


Figura 6: Ejemplo de parábola.

que es la ecuación canónica de la parábola en la referencia elegida.

Es inmediato ver algunas **propiedades** de la parábola que tiene ecuación $y = ax^2$:

- El eje de simetría es el eje de las ordenadas.
- El foco tiene coordenadas $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$.
- La directriz tiene ecuación $y = -\frac{1}{4a}$.
- El vértice está en el origen de los ejes.

4.5.1. Estudio de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$

Queremos demostrar que respecto a otro sistema de coordenadas ortogonales OXY la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c \tag{15}$$

con a, b, c constantes arbitrarias, la primera de las cuales distinta de cero, representa una parábola.

La ecuación (15) es equivalente a:

$$y + \frac{b^2}{4a} - c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$

que, puesto $\Delta = b^2 - 4ac$, se convierte en:

$$y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \tag{16}$$

Si trasladamos los ejes y llevamos el origen al punto $O'\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, las fórmulas de cambio de coordenadas son

$$\begin{cases} x = X - \frac{b}{2a} \\ \\ y = Y - \frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

y entonces en el nuevo sistemas de ejes $O'XY$ la ecuación se convierte en

$$Y = aX^2$$

Esta parábola tiene vértice en $X = 0$, $Y = 0$, tiene como eje de simetría la recta $X = 0$, el foco en el punto de coordenadas $X = 0$, $Y = \frac{1}{4a}$ y la directriz de ecuación $Y = -\frac{1}{4a}$

Entonces la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ representa una parábola

- cuyo vértice es el punto de coordenadas: $\left(-\frac{b}{4a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- su eje de simetría tiene ecuación: $x = -\frac{b}{4a}$;
- el foco tiene coordenadas: $\left(-\frac{b}{4a}, \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}\right)$
- la directriz tiene ecuación: $y = -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$;
- si $a > 0$ la parábola tiene concavidad *hacia arriba*, si $a < 0$ tiene concavidad *hacia abajo*;
- el eje de simetría de una parábola y sus paralelas son llamados diámetros.

Las ecuaciones del tipo

$$x = ay^2 \qquad \text{y} \qquad x = ay^2 + by + c$$

tienen las mismas características que acabamos de estudiar sólo cambiando la x por la y.

4.5.2. Observación importante

De la elipse, de la hipérbola y de la parábola hemos dado definiciones geométricas y en cada caso hemos deducido que para los puntos de estas líneas resulta constante la relación entre las distancia de un punto y de una recta.

Todas estas tres líneas se pueden definir de manera unificada como el lugar del plano, cuyas distancias de un punto F y de una recta d tienen una relación constante $e > 0$. De esta definición resulta que:

1. Para $e < 1$ tenemos una elipse.

2. Para $e = 1$ tenemos una parábola.

3. Para $e > 1$ tenemos una hipérbola.

De esta definición se pueden obtener, como teoremas, las propiedades asumidas como definiciones iniciales de base.

Si ahora elegimos el foco de coordenadas $F(c_1, c_2)$ y la directriz d de ecuación $ax + by + c = 0$, la igualdad $\overline{PF} = e\mathrm{d}(P, d)$ se transforma en:

$$\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = e\,\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

donde $P(x, y)$ pertenece a la cónica. Si elevamos al cuadrado y agrupamos los términos se obtiene:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \tag{17}$$

La igualdad (17) se llama **ecuación general de una cónica**. Podemos dividir todo por A y vemos que el número máximo de puntos que se necesitan para determinar una cónica es cinco.

Ejemplo *Encontrar la ecuación de la elipse de focos* $(0, 1)$ y $(-1, 2)$ *y semieje mayor* $a = \sqrt{2}$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse se tiene

$$2\sqrt{2} = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2}$$

Elevando al cuadrado dos veces y agrupando se tiene:

$$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 4x + 20y + 4 = 0$$

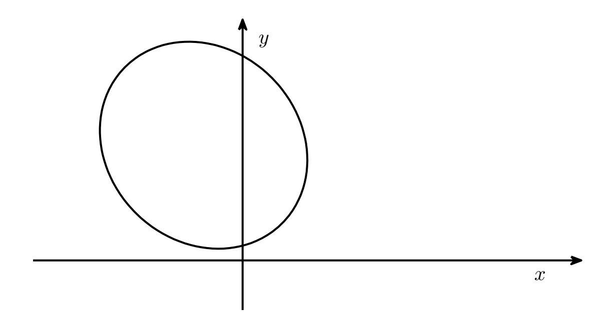


Figura 7: Gráfica de $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 4x - 20y + 4 = 0$.

Ejemplo *Encontrar la ecuación de la parábola de foco $F(1,5)$ y vértice $V(2,2)$.*

La directriz es una recta perpendicular al eje de la parábola, este eje pasa por el vértice y el foco, y cuya distancia del vértice coincide con la distancia del vértice al foco. El eje tiene ecuación

$$y - 2 = \frac{5-2}{1-2}(x-2)$$

es decir

$$3x + y - 8 = 0$$

Un haz de rectas perpendiculares a ésta tiene ecuación

$$d \equiv x - 3y = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

para determinar c imponemos que la distancia del vértice a d sea igual la distancia del vértice al foco F

$$\mathrm{d}(V,d) = \overline{FV} = \sqrt{10}$$

y entonces

$$\sqrt{10} = \frac{|2 - 3 \cdot 2 - c|}{\sqrt{10}} \quad \Longrightarrow \quad c = -14, \quad c = 6$$

Las posibles directrices son $x - 3y = -14$ y $x - 3y = 6$; la primera de estas rectas contiene al punto $(1,5)$ y no puede ser la directriz. La ecuación de la parábola es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = \mathrm{d}(P,d) = \frac{|x - 3y - 6|}{\sqrt{10}}$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene (véase figura 8)

$$9x^2 + y^2 + 6xy - 8x - 136y + 224 = 0$$

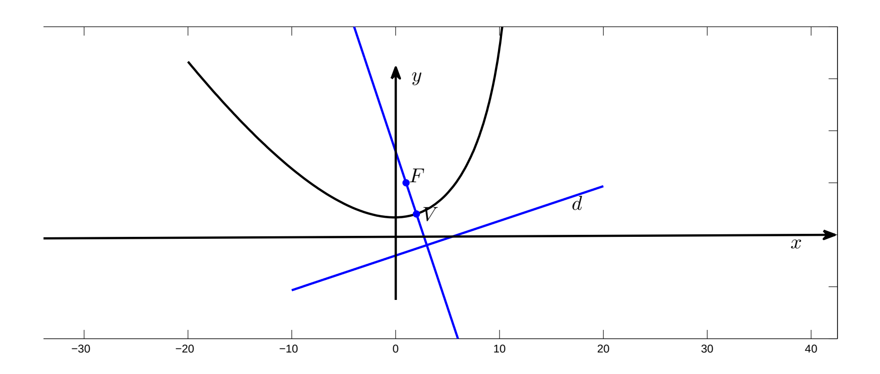


Figura 8: Parábola $9x^2 + y^2 + 6xy - 8x - 136y + 224 = 0$.

Observación importante. Se observa que cuando el eje de la sección cónica está girado respecto a los ejes coordenados, en la ecuación de la cónica siempre aparece un término de la forma xy.

5. La ecuación general de una cónica

Consideramos la ecuación general de una cónica que escribimos en la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + c = 0 \tag{18}$$

Nos preguntamos si toda ecuación (18) representa una cónica y de qué tipo de cónica se trata. Si los ejes de la cónica son paralelos a los ejes coordenados desaparece el término en xy, y los términos en x y en y se pueden eliminar con una traslación.

Los términos $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$ se denominan *parte principal* y se pueden escribir de la forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{19}$$

Podemos definir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

de manera que tenemos:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{20}$$

Para eliminar el término en xy procedemos de la siguiente manera: la matriz A es una matriz simétrica y puede diagonalizarse mediante un cambio de base ortonormal. Sea M la matriz del cambio de base, puesto que M transforma una base ortonormal en otra base ortonormal debe ser una matriz ortogonal. Como las únicas matrices ortogonales en $\mathbb{R}^2$ son los giros y las simetrías, si imponemos que la nueva base conserve la orientación, M debe ser un giro. Si (x_1, y_1) son las coordenadas en la nueva base se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

puesto que $M^T = M^{-1}$ podemos escribir la ecuación (20) de la forma

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x_1, y_1)M^{-1}A\,M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x_1, y_1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$$

donde λ_1, λ_2 son los autovalores de A. Hemos eliminado el término en xy mediante un giro de los ejes coordenados.

La ecuación (18) se transforma en

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b = 0 \tag{21}$$

Ahora vamos a estudiar los casos que se pueden presentar.

1. $|A| = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

   En este caso la cónica es de **tipo elíptico**. Los autovalores λ_1, λ_2 tienen el mismo signo y siempre podemos tomarlos positivos y además elegir $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Podemos escribir la ecuación (21) de la forma

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} + b = 0$$

si ahora hacemos la traslación

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \\ \\ Y = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{array} \right.$$

la cónica se transforma en

$$\frac{X^2}{1/\lambda_1} + \frac{Y^2}{1/\lambda_2} = c, \qquad \text{donde} \quad c = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - b$$

Dependiendo del valor c tenemos tres posibilidades

a) Si $c > 0$ y tomamos $\frac{1}{\lambda_1} \geq \frac{1}{\lambda_2}$ la ecuación anterior es una elipse con focos en el eje $\overrightarrow{X}$.

b) Si $c = 0$ se obtiene un punto.

c) Si $c < 0$ no existe ningún punto real que satisface la ecuación.

2. $|A| = \lambda_1\lambda_2 < 0$.

   La cónica se dice que es de **tipo hiperbólico**. En este caso los autovalores tienen signo opuesto, siempre podemos tomar $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$. Según los valores de c tenemos dos casos:

   a) Si $c \neq 0$ tenemos una hipérbola de la forma canónica $X^2/a^2 - Y^2/b^2 = \pm 1$.

   b) Si $c = 0$ tenemos dos rectas de la forma $Y = \pm\sqrt{\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}}X$ (tenemos que $\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}{>}0$).

3. Si $|A| = \lambda_1\lambda_2 = 0$.

   La cónica se dice que es de **tipo parabólico**. Siempre se puede tomar $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Mediante un giro adecuado la ecuación (18) se transforma en

$$\lambda_2 y_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b = 0 \qquad (22)$$

   Ahora pueden presentarse varios casos:

a) Si $b_1 \neq 0$ la ecuación (14) puede escribirse de la forma

$$\lambda_2 \left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + b_1 \left(x_1 + \frac{b}{b_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} \right) = 0$$

Si ahora hacemos la traslación

$$\begin{cases} X = x_1 + \frac{b}{b_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} \\ \\ Y = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$$

llegamos a la ecuación

$$Y^2 = \frac{b_1}{\lambda_2} X$$

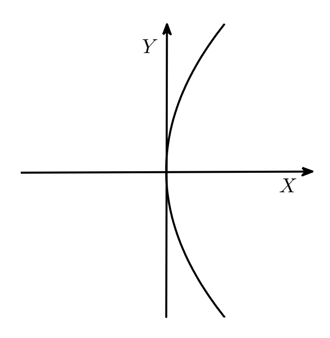


Figura 9: Gráfica de $Y^2 = \frac{b_1}{\lambda_1} X$

b) Si $b_1 = 0$ la ecuación (14) puede escribirse de la forma

$$\lambda_2 \left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + b - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} = 0$$

y después de la traslación

$$\begin{cases} X = x_1 \\ \\ Y = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{cases}$$

se transforma en

$$Y = -\frac{c}{\lambda_2}, \qquad \text{con} \qquad c = b - \frac{b_2^2}{4\lambda_2}.$$

b1) Si $-\frac{c}{\lambda_2} > 0$, $Y = \sqrt{-\frac{c}{\lambda_2}}$ representa dos rectas paralelas, véase figura 10.

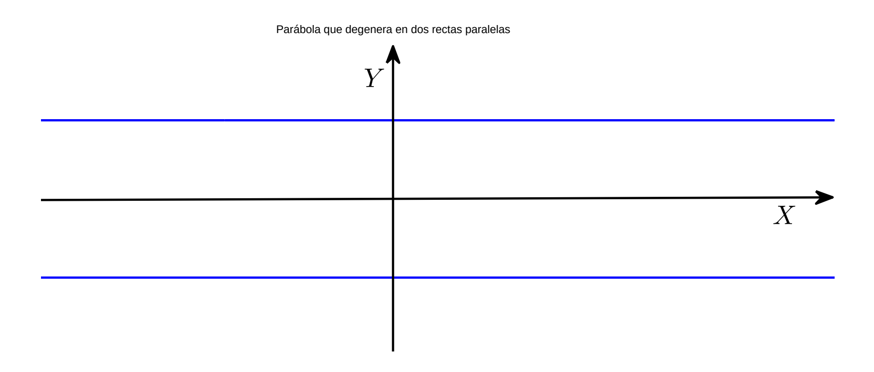


Figura 10: Parábola degenerada.

b2) Si $-\frac{c}{\lambda_2} = 0$ se obtiene un punto.
b3) Si $-\frac{c}{\lambda_2} < 0$ se obtiene el conjunto vacío.

En la Tabla 5 hay un resumen de los distintos casos. Los coeficientes a, $b \in \mathbb{R}$ son números oportunos en la referencia $O'XY$. Los cambios de coordenadas son todos isométricos. El proceso se llama reducción de la cónica en forma canónica métrica y la clasificación que hemos dado se llama *clasificación métrica de las cónicas.*

Ejemplo. *Estudiar la cónica que tiene ecuación*

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 28x - 96y - 120 = 0$$

La parte principal asociada a la cónica es $11x^2 - 24xy + 4y^2$ que se puede escribir en la forma

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Los autovalores de A son $\lambda_1 = 20$ y $\lambda_2 = -5$. Los espacios propios asociados son

$$N_{20} = \langle(-4, 3)\rangle \qquad N_{-4} = \langle(3, 4)\rangle$$

caso	ecuación	descripción
1	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$	elipse
2	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = -1$	$\emptyset$
3	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 0$	un punto
4	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = \pm 1$	hipérbola
5	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$	dos rectas incidentes
6	$Y = aX^2$	parábola
7	$\frac{Y^2}{b^2} = 1$	rectas paralelas distintas
8	$Y^2 = 0$	rectas paralelas coincidentes
9	$\frac{Y^2}{b^2} = -1$	$\emptyset$

Cuadro 1: Clasificación métrica de cónicas.

Entonces una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ es

$$B' = \left\langle \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle$$

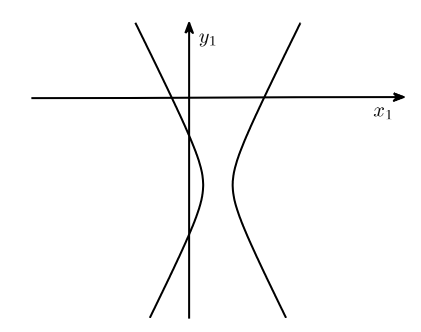


Figura 11: Gráfica de $4x_1^2 - y_1^2 - 16x_1 - 12y_1 - 24 = 0$.

El cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

siendo (x_1, y_1) coordenadas en la base ortonormal B' y siendo

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

la matriz del cambio de base.

Siendo la matriz M ortonormal ($M^{-1} = M^T$) resulta también que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sustituyendo la ecuación tiene la forma

$$4x_1^2 - y_1^2 - 16x_1 - 12y_1 - 24 = 0$$

En la figura 11 hemos girado la cónica. Los ejes x_1 y y_1 son paralelos a los autovectores de las matriz A.

Ahora haremos una traslación para eliminar los términos lineales en x_1 y y_1:

$$\begin{cases} x_1 = X + \alpha \\ y_1 = Y + \beta \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación anterior y encontramos

$$4X^2 - Y^2 + (8\alpha - 16)X - (2\beta + 12)Y + (4\alpha^2 - \beta^2 - 16\alpha - 12\beta - 24) = 0$$

De aquí se deduce que si $\alpha = 2$ y $\beta = -6$ la ecuación de la cónica se convierte en

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1$$

Es la ecuación de una hipérbola, con semieje de longitud 1, que tiene como asíntotas las rectas $2X \pm Y = 0$. Los ejes de simetría tienen ecuación $X = 0$ y $Y = 0$.

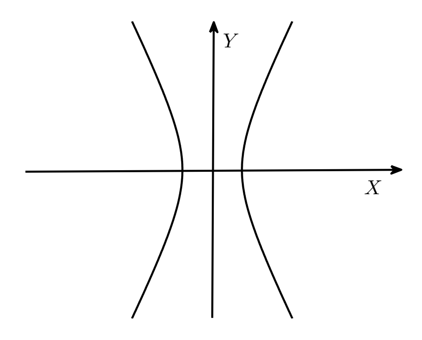


Figura 12: $X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1$

Para llegar a esta ecuación hemos hecho un giro y una traslación $\mathbf{T}_{(2,-6)}$. Resumiendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{(2,-6)} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

si las componemos tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X+2 \\ Y-6 \end{pmatrix}$$

No es complicado invertirlas y tenemos

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 6 \end{pmatrix}$$

Gracias a estas relaciones podemos encontrar todos los elementos notables de la cónica en la referencia inicial Oxy.

El eje

$$X = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 = 0$$

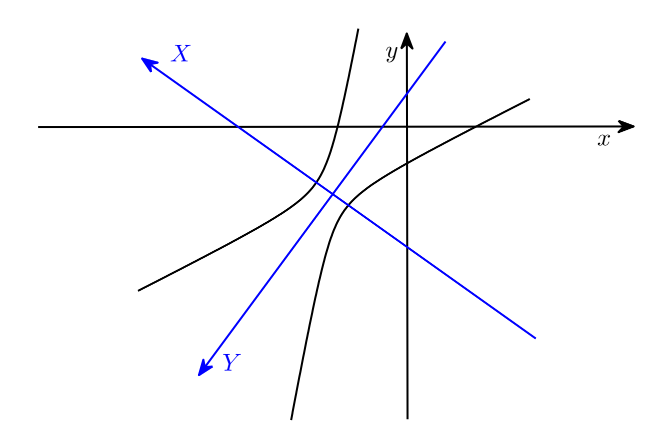


Figura 13: La hipérbola $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 28x - 96y - 120 = 0$ y sus ejes.

El eje

$$Y = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 6 = 0$$

El centro de simetría que en la referencia $O'XY$ claramente tiene coordenadas $(0,0)$ en la referencia inicial Oxy tiene coordenadas $(-26/5, -18/5)$

Las ecuaciones de las asíntotas:

$$2X \pm Y = 0 \qquad \text{se convierten en} \qquad -x + 2y + 2 = 0 \quad \text{y} \quad 11x - 2y + 50 = 0$$

En la figura 13 pintamos la cónica $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 28x - 96y - 120 = 0$ y también la referencia $O'XY$ donde la cónica tiene la forma canónica.

Ejemplo. *Estudiar la cónica $\mathcal{C}$ que tiene ecuación*:

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$$

La parte principal de la cónica es $x^2 + y^2 + 2xy$ y la matriz simétrica correspondiente es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Los autovectores asociados son $V_0 = \langle (1, -1) \rangle$ y $V_2 = \langle (1, 1) \rangle$. Entonces una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ es

$$B' = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

El cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

siendo

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

la matriz del cambio de base. Con este cambio la ecuación se reduce a

$$2y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 - 1 = 0$$

Ahora buscamos un β de manera que el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x_1 = X \\ y_1 = Y + \beta \end{cases}$$

elimine el término de primer grado en y_1. Sustituimos y sale

$$2Y^2 + (4\beta - 2\sqrt{2})Y + 4\beta^2 - 2\sqrt{2}\beta - 1 = 0$$

cuando $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la ecuación se convierte en

$$Y^2 - 1 = 0$$

En la referencia $O'XY$ la cónica degenera en un par de recta paralelas de ecuaciones

$$Y = 1 \qquad \text{y} \qquad Y = -1$$

Invertimos el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces en la referencia Oxy las rectas tienen ecuación

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) \qquad \text{y} \qquad x + y = (1 - \sqrt{2})$$

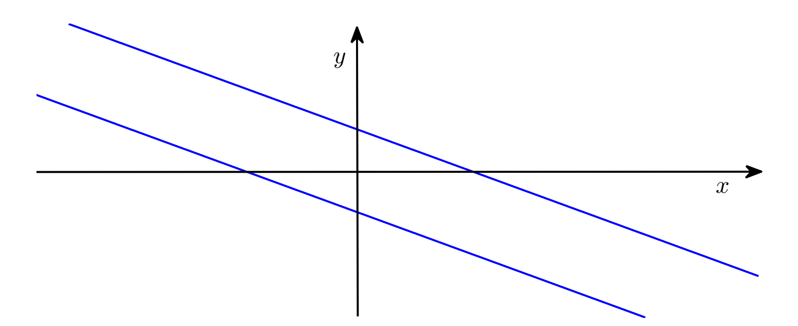


Figura 14: Parábola que degenera en dos rectas paralelas.

Referencias

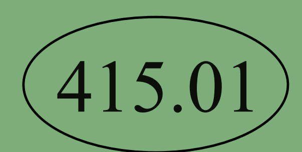
[1] Eugenio Hernández, *Álgebra y geometría*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[2] Agustín de la Villa, *Problemas de Álgebra*, CLAGSA, 2010.

[3] Eugenia Rosado, *Espacio proyectivo real. Cónicas*, Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Cuaderno 302.01, 2010.

[4] José Luis Pinilla, *Cónicas, cuádricas, curvas y superficies*, Varicop, 1970.

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

